Relatório Técnico

Núcleo de Computação Eletrônica

Análise e Simulação Numérica de Vibração da Corda Elástica com Fronteira Móvel

M. A. Rincon
I-Shih Liu

NCE - 05/00

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise e Simulação Numérica de Vibração da Corda Elástica com Fronteira Móvel

M. A. Rincon & I-Shih Liu*

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro 21945-970, Brazil

1 Introdução

Uma generalização interessante da equação de onda de D'Alembert foi proposta em [2,3] considerando a variação da tensão da corda elástica devido a sua pequena variação de comprimento na vibração com os extremos fixos. O modelo é denominado de Kirchhoff-Carrier e formulado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{\kappa}{2mL}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

onde $u(x,t)$ é o deslocamento transversal da corda; τ_0 a tensão da corda em repouso; m a densidade de massa; $\kappa = \sigma E$, E o módulo de Young e σ a área da seção da corda; L o comprimento da corda. O termo não linear introduzido no modelo (1) foi estudado por vários autores, entre eles, Bernstein [1], Carrier [2], Kirchhoff [3], Lions [4], Medeiros [5], Naraschinham [8], Strauss [13]. Este modelo foi recentemente generalizado para o caso com os extremos não necessariamente fixos.

2 Modelo Fronteira Móvel

Em [7] Medeiros & Limaco, deduziu um modelo baseado em (1) com a fronteira variando com o tempo nas extremidades da corda, formulado por,

$$\widehat{L}u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(a(t) + b(t)\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

$$\alpha(t) < x < \beta(t), \qquad t > 0,$$

*E-mails: rincon@lci.im.ufrj.br, liu@dmm.im.ufrj.br

onde $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são as posições dos extremos esquerdo e direito da corda no instante t respectivamente; o comprimento da corda horizontal é dado por $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) > 0$;

$$a(t) = \frac{\tau_0}{m} + \frac{\kappa}{m}\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{\gamma(0)}\right), \qquad b(t) = \frac{\kappa}{2m\gamma(t)}. \tag{3}$$

Denominando por $\widehat{Q} = \left\{(x,t) \in I\!R^2; \alpha(t) < x < \beta(t), t > 0\right\}$ o domínio não cilíndrico com fronteira $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}$ $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}$, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \widehat{L}u(x,t) = f(x,t) & \forall\,(x,t) \in \widehat{Q}, \\ u(x,t) = 0 & \forall\,(x,t) \in \widehat{\Sigma}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad \alpha(0) < x < \beta(0). \end{cases} \tag{4}$$

Em [7] a solução local do problema (4) foi estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Considere as seguintes hipóteses:*

H1: $\alpha, \beta \in C^2([0,T[; I\!R)$;
$\alpha(t) < \beta(t)$; $\alpha'(t) < 0$, $\beta'(t) > 0$, *para* $0 \leq t < T$; *e*
$| \alpha'(t) + \gamma'(t)y | < (m_0/2)^{1/2}$, *para* $0 \leq t < T$, $0 \leq y \leq 1$.

H2: $a \in W^{1,\infty}(0,\infty)$, $a(t) \geq m_0 > 0$.

Além disso, seja Ω_t *e* Ω_0 *os intervalos* $(\alpha(t), \beta(t))$ *e* $(\alpha(0), \beta(0))$.

Dados $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \bigcap H^2(\Omega_0)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega_0)$, $f \in C^0([0,T[; H_0^1(\Omega_t))$, *então existe* $0 < T_0 < T$ *e uma única função* $u : \widehat{Q} \to I\!R$, *solução do problema* (4) *satisfazendo as seguintes condições:*
$u \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega_t) \bigcap H^2(\Omega_t))$
$u' \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega_t))$
$u'' \in L^2(o,T_0; L^2(\Omega_t))$

Na demonstração do teorema, utilizou-se o seguinte operador definido no domínio cilíndrico, $Q =]0,1[\times]0,T[$, $\Psi : \widehat{Q} \to Q$ tal que

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}, t\right) = (y,t) \tag{5}$$

e a mudança de variável $u(x,t) = v(y,t)$. Nestas condições temos o seguinte problema equivalente definido no domímio cilíndrico:

$$\begin{cases} Lv(y,t) = g(y,t) & \forall\,(y,t) \in Q, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & 0 < t < T, \\ v(y,0) = v_0(y), & \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,0) = v_1(y), \quad 0 < y < 1, \end{cases} \tag{6}$$

onde

$$Lv(y,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{7}$$

$$a(y,t) = \frac{1}{4}(b(y,t)^2 - \frac{1}{\gamma^2}\left(a(t) + \frac{b(t)}{\gamma}\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy\right), \tag{8}$$

$$b(y,t) = -2\left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\right), \tag{9}$$

$$c(y,t) = \frac{-1}{\gamma}\left(\alpha'' + \gamma'' y + \gamma' b(y,t)\right) \tag{10}$$

e $a(t), b(t)$ são definidos em (3).

3 Método Numérico

Por conveniência, um primeiro procedimento para determinar a solução numérica do problema é reduzir o problema (6) para um sistema de primeira ordem. Considerando

$$u(y,t) = \frac{\partial v}{\partial t}(y,t) \qquad w(y,t) = \frac{\partial v}{\partial y}(y,t),$$

e substituindo em (7) obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(y,t)\dfrac{\partial w}{\partial y} + b(y,t)\dfrac{\partial u}{\partial y} = -c(y,t)w(y,t) + g(y,t), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Na forma matricial, denotando $U = (u,w)^T$, obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(y,t)\frac{\partial U}{\partial y} = B(y,t)U + C(y,t), \tag{12}$$

onde

$$A(y,t) = \begin{bmatrix} b(y,t) & a(y,t) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$B(y,t) = \begin{bmatrix} 0 & -c(y,t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$C(y,t) = \begin{bmatrix} g(y,t) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Seja $U_j^n = U(jh, nk)$ a solução aproximada da solução exata $U(y,t)$ nos pontos discretos da malha $y = jh$ e $t = nk$, onde j é um inteiro e n é um inteiro não negativo. Considere o esquema de aproximação de Lax-Friedrich dado abaixo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{1}{k}\left(U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)\right), \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \approx \frac{1}{2h}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right). \qquad (17)$$

Substituindo na equação (12) obtemos o seguinte sistema,

$$\frac{1}{k}\left(U_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right)\right) + \frac{A_j^n}{2h}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) = B_j^n U_j^n + C_j^n, \qquad (18)$$

para $n = 0, 1, 2\cdots$; $j = 1, 2\cdots(N-1)$. Denotando por I a matriz identidade de ordem 2, obtemos o seguinte sistema explícito:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - \lambda A_j^n\right)U_{j-1}^n + \frac{1}{2}\left(I + \lambda A_j^n\right)U_{j+1}^n + kB_j^n U_j^n + kC_j^n, \qquad (19)$$

para $n = 0, 1, 2\cdots$; $j = 1, 2\cdots(N-1)$; onde $\lambda = k/h$ e

$$U_j^n = (u_j^n, w_j^n)^T = \left((v_t)_j^n, (v_y)_j^n\right)^T,$$

$$A(jh, nk)) = A_j^n = \begin{bmatrix} b_j^n & a_j^n \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

$$B(jh, nk) = B_j^n = \begin{bmatrix} 0 & -c_j^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

$$C(jh, nk) = C_j^n = \begin{bmatrix} g_j^n \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

e os coeficientes a_j^n, b_j^n e c_j^n são definidos nos pontos da malha (jh, nk) por (8),(9) e (10). Para determinar a solução numérica U_j^n através do esquema (19) precisamos introduzir a condição inicial U_j^0 e os valores U_0^n e U_N^n da fronteira.

3.1 Condições de Fronteira e Condição Inicial

Na forma matricial a condição inicial e as condições de fronteira podem ser escritas por

$$U(y,0) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(y,0), \frac{\partial v}{\partial y}(y,0)\right)^T,$$

$$U(0,t) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(0,t), \frac{\partial v}{\partial y}(0,t)\right)^T = \left(0, \frac{\partial v}{\partial y}(0,t)\right)^T,$$

$$U(1,t) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(1,t), \frac{\partial v}{\partial y}(1,t)\right)^T = \left(0, \frac{\partial v}{\partial y}(1,t)\right)^T.$$

Segue do problema (6) que a condição inicial é conhecida mas os valores de fronteira $\frac{\partial v}{\partial y}(0,t)$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(1,t)$ são desconhecidos. Da compatibilidade entre os dados em $t = 0$ temos

$$w(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v_0}{\partial y}(0)$$

$$w(1,0)=\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)=\frac{\partial v_0}{\partial y}(1),$$

que são valores conhecidos em (6). Para $t>0$ utilizando a identidade,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(y,t)=\frac{\partial u}{\partial y}(y,t),$$

os valores da fronteira podem ser aproximados, para cada n fixo, por

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,t)\approx w_0^{n+1}=w_0^n+\lambda(u_1^n-u_0^n),\quad n=0,1,\cdots \tag{23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(1,t)\approx w_N^{n+1}=w_N^n+\lambda(u_N^n-u_{N-1}^n),\quad n=0,1,\cdots \tag{24}$$

Os termos do lado direito das equações (23) e (24) são determinados em cada etapa da resolução do problema, ou seja, os valores aproximados da fronteira U_0^{n+1} e U_N^{n+1} são obtidos passo a passo. Dessa forma fazendo $n=0$ em (19) e variando $j=1,2\cdots(N-1)$ temos

$$U_j^1=\frac{1}{2}\left(I-\lambda A_j^0\right)U_{j-1}^0+\frac{1}{2}\left(I+\lambda A_j^0\right)U_{j+1}^0+kB_j^0U_j^0+kC_j^0, \tag{25}$$

onde, como vimos, a condição inicial U_j^0 é conhecida e portanto a solução aproximada U_j^1 é obtida para $j=1,2\cdots(N-1)$. Para determinar a solução U_j^2, inicialmente precisamos calcular os valores de fronteira U_0^1 e U_N^1. Pela definição de U_j^{n+1}, fazendo $j=0$ e $j=N$ para $n=1$ temos

$$U_0^2=\begin{bmatrix} u_0^2 \\ w_0^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ w_0^2 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$U_N^2=\begin{bmatrix} u_N^2 \\ w_N^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ w_N^2 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

onde os valores de w_0^2 e w_N^2 são obtidos de (23) e (24). Assim sucessivamente para $n=2,3\cdots$, obtemos a solução aproximada U_j^{n+1} do problema (12). Para obter a solução aproximada do problema original (6) podemos fazer o seguinte procedimento de aproximação:

$$v_j^n=v_{j-1}^n+\frac{h}{2}\left((v_y)_j^n+(v_y)_{j-1}^n\right);\quad n=0,1,2,\ldots;\quad j=1,\ldots,N. \tag{28}$$

Com a solução v_j^n do problema (6) conhecida, usando a mudança de variável,

$$u(x,t)=v(y,t)\quad\text{com}\quad y=\frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}$$

obtemos a solução numérica $u(x,t)$ do problema (4) da corda com fronteira móvel.

3.2 Estabilidade

Do Teorema da pertubação de Strang [9] os termos no lado direito da equação (12) pode ser eliminado na análise de estabilidade. Desta forma consideraremos somente o sistema de primeira ordem dado por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(y,t)\frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{29}$$

Desde que o coeficiente $A(y,t)$ depende de y não podemos aplicar a transformada de Fourier convenientemente para verificar se o método numérico satisfaz a condição de von Neumann. Mas podemos usar o seguinte resultado para sistemas hiperbólicos (ver [9]). O problema de valor inicial (29) é bem posto se e somente se o problema com coeficiente fixo,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(\overline{y},t)\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{30}$$

é bem posto. Analisaremos então a estabilidade do problema (30) com $\overline{y}$ fixo, dessa forma, denotaremos $A(t) = A(\overline{y},t)$. A aproximação do esquema numérico, similar a (19), é dada por

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - \lambda A^n\right) U_{j-1}^n + \frac{1}{2}\left(I + \lambda A^n\right) U_{j+1}^n \tag{31}$$

para $n = 0, 1, 2 \cdots$; $j = 1, \cdots N-1$. A transformada discreta de Fourier de uma função $U = \{U_j\}$ é dada por

$$\widehat{U}(\xi) = \sum_j U_j e^{ij\xi}, \qquad i = \sqrt{-1}, \quad 0 \leq \xi < 2\pi.$$

Logo,

$$\widehat{\{U_{j-1}^n\}} = \sum_j U_{j-1} e^{ij\xi} = e^{i\xi}\widehat{U}^n,$$

$$\widehat{\{U_{j+1}^n\}} = \sum_j U_{j+1} e^{ij\xi} = e^{-i\xi}\widehat{U}^n.$$

Aplicando a transformada de Fourier discreta em (31) obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{U}^{n+1}(\xi) &= \left(\tfrac{1}{2}\left(I + \lambda A^n\right) e^{i\xi} + \tfrac{1}{2}\left(I - \lambda A^n\right) e^{-i\xi}\right) \widehat{U}^n(\xi) \\
&= \left(\tfrac{I}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) + \tfrac{\lambda}{2}A^n(e^{i\xi} - e^{-i\xi})\right) \widehat{U}^n(\xi) \\
&= \left(I\cos(\xi) - i\lambda A^n \operatorname{sen}(\xi)\right) \widehat{U}^n(\xi) \\
&= G(n,\xi)\widehat{U}^n(\xi).
\end{aligned} \tag{32}$$

A matriz $G(n,\xi) = (I\cos(\xi) - i\lambda A^n \operatorname{sen}(\xi))$ é denominada matriz amplificação e a condição de von Neumann na norma de $L^2(\Omega)$ para a estabilidade é dada por

$$\|G(t,\xi)\| \leq 1 + ck,$$

onde c é uma constante positiva (independente de k,h,n e ξ) e k denota o passo. Como o sistema é hiperbólico então para cada n fixo existe uma matriz não singular Q, tal que

$\max\{\|Q\|, \|Q^{-1}\|\} \leq M$ satisfazendo a condição $A = QDQ^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal real. Denotaremos $\hat{A} = \max\{A^n; nk \leq T,\ n = 0, 1, \cdots\}$. Usando a decomposição, $\hat{A} = \hat{Q}\hat{D}\hat{Q}^{-1}$ e substituindo na matriz amplificação temos

$$\begin{aligned} G(\xi) &= I\cos(\xi) - i\lambda\hat{Q}\hat{D}\hat{Q}\,\mathrm{sen}(\xi) \\ &= \hat{Q}\hat{Q}^{-1}\cos(\xi) - i\lambda\hat{Q}\hat{D}\hat{Q}^{-1}\,\mathrm{sen}(\xi) \\ &= \hat{Q}\,(D_G(\xi))\,\hat{Q}^{-1}, \end{aligned} \tag{33}$$

onde

$$D_G(\xi) = I\cos(\xi) - i\lambda\hat{D}\,\mathrm{sen}(\xi)$$

é uma matriz diagonal real, ou seja

$$D_G(\xi) = \mathrm{diag}\,(\cos(\xi) - i\lambda\mu_j\,\mathrm{sen}(\xi)),$$

onde $\mu_j, j = 1, 2$ são os autovalores reais da matriz diagonal $\hat{D}$. Assim

$$\|D_G(\xi)\| = \max_{j=1,2} |\cos(\xi) - i\lambda\mu_j\,\mathrm{sen}(\xi)|.$$

Para satisfazer a condição CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) é suficiente tomar λ tal que $|\mu_j|\lambda \leq 1$. De fato, temos

$$|cos(\xi) - i\mu_j\lambda\,\mathrm{sen}(\xi)|^2 = 1 - (1 - \mu_j^2\lambda^2)\,\mathrm{sen}^2(\xi).$$

Logo, $\|D_G(\xi)\| \leq 1$, e portanto,

$$\|G(\xi)\| = \|\hat{Q}D_G(\xi)\hat{Q}\| \leq \|\hat{Q}\|\|D_G\|\|\hat{Q}\|^{-1} \leq \hat{M}^2 < \infty. \tag{34}$$

3.3 Consistência

Fazendo a expansão em série de Taylor da função U no ponto (ih, nk), obtemos

$$\frac{1}{2}\left(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n\right) = U_i^n + \frac{h^2}{2}(U_{xx})_i^n + O(h^4). \tag{35}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\left(U_i^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n)\right) &= (U_t)_i^n + \tfrac{k}{2}(U_{tt})_i^n - \tfrac{h^2}{2k}(U_x)_i^n + O(h^4/k) \\ &= (U_t)_i^n + \tfrac{k}{2}(U_{tt})_i^n - \tfrac{h}{2\lambda}(U_{xx})_i^n + O(h^3) \\ &= (U_t)_i^n + O(k) + O(h). \end{aligned}$$

Substituindo na equação temos

$$\frac{1}{k}\left(U_i^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n)\right) - \frac{1}{2h}A_i^n(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) = (U_t)_i^n - A(y,t)(U_x)_i^n + O(k) + O(h).$$

Como as aproximações dos valores de fronteira também tem precisão $O(k) + O(h)$ então o método é consistente com a equação e tem precisão de $O(k) + O(h)$.

3.4 Autovalores

Vimos anteriormente que $\lambda = k/h$, deve satisfazer a condição CFL, $|\mu_j|\lambda \leq 1$ e assim obtermos $\|D_G(\xi)\| \leq 1$. Sobre o ponto de vista numérico é fundamental determinar os autovalores $\mu_j = \mu_j(y,t), j = 1,2$ da matriz A definida em (13) para tomar o λ convenientemente. O polinômio característico $P(\mu) = P(\mu(y,t)$ é dado por

$$P(\mu) = \mu(y,t)^2 - b(y,t)\mu(y,t) + a(y,t).$$

Logo, obtemos

$$\mu_1(y,t) = \frac{1}{2}\left(b(y,t) - \sqrt{(b(y,t)^2 - 4a(y,t))}\right),$$

$$\mu_2(y,t) = \frac{1}{2}\left(b(y,t) + \sqrt{(b(y,t)^2 - 4a(y,t))}\right).$$

Como o sistema é hiperbólico então $(b(y,t)^2 - 4a(y,t)) > 0$. Portanto os autovalores $\mu_j, j = 1,2$ são reais e usando a definição de $a(y,t)$ e $b(y,t)$ dados em (8) e (9) temos

$$(b(y,t)^2 - 4a(y,t) = \frac{4}{(\gamma(t))^2}\left(a(t) + \frac{1}{\gamma(t)}b(t)I_t\right) > 0, \tag{36}$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são definidos em (3) e por I_t estamos denotando a integral,

$$I_t = \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy \geq 0.$$

Assim $a(t) > 0$ é uma condição suficiente para a hiperbolicidade, ou seja, de (3) a condição é dada por

$$\gamma(t) > \gamma(0)\left(1 - \frac{\tau_0}{\kappa}\right). \tag{37}$$

A desigualdade acima significa que se o comprimento da corda $\gamma(t)$ diminui muito então perde a hiperbolicidade e isso significa que a corda não manterá a vibração.

Note que a condição de convergência da solução numérica aproximada é mais fraca que a condição dada no Teorema 2.1, mais explicitamente não estamos exigindo para todo $t > 0$ que $\alpha(t)$ seja decrescente e $\beta(t)$ seja crescente. Da outra condição do mesmo teorema, temos

$$|\ \alpha'(t) + \gamma'(t)y\ | < \left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}, \qquad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

ou equivalentemente,

$$\max_{t\in(0,T)}\{\ |\alpha'(t)|,\ |\beta'(t)|\} < \left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2},$$

onde usamos a definição de $\gamma(t)$. Esta relação significa que a velocidade de deslocamento da fronteira não pode ser muito grande. Mas também não se exige esta condição neste esquema numérico.

Usando a definição de $a(y,t)$ e $b(y,t)$ então os autovalores reais μ_j são dados por

$$\mu_j(y,t) = \frac{1}{\gamma(t)}\left((\alpha'(t)+\gamma'(t)y) \pm \sqrt{a(t)+\frac{1}{\gamma(t)}b(t)I_t}\right), \quad j=1,2.$$

Observe que se $\gamma(t)$ é crescente ou decrescente temos respectivamente,

$$\mu_j(t) = \max_{y\in(0,1)} \mu_j(y,t) = \frac{1}{\gamma(t)}\left(\beta'(t) \pm \sqrt{a(t)+\frac{1}{\gamma(t)}b(t)I_t}\right), \quad j=1,2, \tag{38}$$

$$\mu_j(t) = \max_{y\in(0,1)} \mu_j(y,t) = \frac{1}{\gamma(t)}\left(\alpha'(t) \pm \sqrt{a(t)+\frac{1}{\gamma(t)}b(t)I_t}\right), \quad j=1,2. \tag{39}$$

Da condição CFL devemos tomar para cada passo k, $\lambda = k/h \leq |\,\mu\,|^{-1}$. Assim não temos necessariamente um passo uniforme k, como mostrado na Fig. 6 pela função $\lambda(t)$. Mas neste caso quando $\mu(t)$ é muito grande então o passo k será muito pequeno (a computação é muito lenta) ou muito grande (perda de precisão) no caso contrário. Portanto é necessário ter uma tolerância inferior e superior do valor de λ no esquema numérico. Para obter um passo uniforme é suficiente tomar $\lambda = \min_{t\in[0,T]} \lambda(t)$. A integral I_t pode ser calculada por qualquer método numérico e depende do valor aproximado obtido na iteração imediatamente anterior e portanto em cada etapa da iteração poderá assumir valores diferentes.

4 Exemplos Numéricos

Apresentamos abaixo quatro exemplos numéricos representativos das várias características do modelo. Por conveniência, tomamos a força externa nula, $f(x,t)=0$, e a velocidade inicial da corda nula.

4.1 Exemplo 1

Considere as fronteiras

$$\alpha(t) = -t, \qquad \beta(t) = t+1$$

e a posição inicial dada por

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ \frac{1}{10}(x-1)^2 & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{40}$$

As constantes do material são dadas por $\tau_0/m = 1$ e $\kappa/m = 5$; tomamos $\lambda = k/h = 0.5$, onde o passo $k = 0.005$ e $h = 0.01$. Observe que neste exemplo temos $\alpha(t)$ decrescente, $\beta(t)$ crescente e a posição inicial $u(x,0)$ é apenas contínua. Nestas condições a solução numérica $u(x,t)$ é determinada no intervalo $[0,T] = [0,25]$. A Fig. 1 mostra a vibrações da corda para passos $n = 0, 50, 100, 150, 200$ que correspondem a solução nos tempos

$t = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ e o comprimento da corda $\gamma(t)$ varia no intervalo $[1,3]$. A Fig. 2 mostra a solução no ponto fixo $x = 0.5$ variando no intervalo de tempo $[0,25]$. Note uma irregularidade inicial da solução que vai sendo suavizada no tempo, isto se deve ao fato da velocidade inicial ser apenas contínua. A Fig. 3 mostra o autovalor $\mu(t)$ para $t \in [0,25]$. É interessante observar que $\mu(t)$ neste exemplo, calculado por (38) é decrescente e o seu valor varia no intervalo $(0.3, 2)$. Logo tomando $\lambda = 0.5$ a condição CFL é sempre satisfeita para o passo uniforme. Caso tomássemos $\lambda(t) = \mu(t)^{-1}$ então teríamos λ variando no intervalo $(0.5, 3.3)$ e assim há uma perda de precisão significativa com o crescimento do tempo.

4.2 Exemplo 2

Consideremos as fronteiras

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi t/T) - 1\right), \qquad \beta(t) = \frac{1}{2}(3 - \cos(2\pi t/T))$$

como mostrado na Fig. 4. Note que $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ não são monótonas como exigido no Teorema 2.1. O comprimento da corda $\gamma(t) = 2 - \cos(2\pi t/T)$ e assim $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(T) = 1$. Obviamente $\gamma(t)$ é limitada e não é uma função monótona em $[0,T]$. A posição inicial é dada por

$$u(x,0) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sen}(\pi x).$$

As constantes são, $\tau_0/m = 4$, $\kappa/m = 40$, $T = 10$. Usamos $\lambda(t) = \mu(t)^{-1}$ e a sua variação está mostrado na Fig. 6. A Fig. 5 mostra a vibração da corda no ponto $x = 0.5$. Note que quando o comprimento da corda aumenta à amplitude da vibração diminui e depois cresce para à amplitude inicial quando o comprimento da corda diminui para o tamanho original.

4.3 Exemplo 3

Mostramos na Fig. 7 a evolução da função $u(x,t)$ da corda com fronteira móvel definida por

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1}, \qquad \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1}$$

e a posição inicial

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{sen}(\pi x).$$

As constantes usadas são, $\tau_0/m = 1$, $\kappa/m = 5$, $\lambda = 0.2$, $h = 0.05$.

Observamos que $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = -1$, $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = 2$, ou seja a fronteira tende a ser fixa. Nestas condições, o autovalor máximo é limitado para todo t, e assim o esquema numérico converge para qualquer T.

4.4 Exemplo 4

O objetivo deste exemplo é mostrar a influência do termo não linear do modelo de Kirchhoff-Carrier, com fronteira fixa. O autovalor $\mu(t)$ é dado por

$$\mu(t) = \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{\kappa}{2mL}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Tomamos as constantes: $L = 1$, $\tau_0/m = 4$, $\kappa/m = 40$, $T = 5$, $h = 0.05$ e a posição inicial igual à do Exemplo 2.

A Fig. 8 mostra a vibração da corda no ponto $x = 0.5$. A amplitude da vibração é constante, como esperado embora com uma frequência maior devido ao valor $\mu(t) \geq (\tau_0/m)^{1/2}$, como mostrado na Fig. 9.

References

[1] Bernstein, S.: Sur une classe d'équations fonctionelles aux derivées partielles. Isv. SSSR, Série Math. 4, 17-26 (1940).

[2] Carrier, C. E.: On the vibration problem of elestic string. Q. J. Appl. Math., 151-165 (1953).

[3] Kirchhoff, G.: Vorlesungen über Mechanik. Tauber, Leipzig (1883).

[4] Lions, J. L.: Quelques métodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod. Paris (1969).

[5] Medeiros, L. A.: On some nonlinear pertubation of Kirchhoff-Carrier operator. Comp. and Appl. Math. 13, 225-233 (1994).

[6] Medeiros, L. A.: On a new class of nonlinear wave equations. J. Math. Anal. Appl., 69, 252-262 (1979).

[7] Medeiros, L. A; Limaco, J. F.: Kirchhoff-Carrier Elastic Strings in noncylindrical Domains. Portugaliae Mathematica, vol 56, Fasc.4 1-36 (1999).

[8] Narashinham, R.: Nonlinear vibrations of an elastic string. J. Sound. Vibr., 8, 134-136 (1968).

[9] Newman, W. G.: Global solution of a nonlinear string equation. J. Math. Anal. Appl., 192, 689-704 (1995).

[10] Richtmyer, R. D.; Morton, K. W.: Difference Methods for Initial-Value Problems. Interscience Publishers (1967).

[11] Sod, G. A.: Numerical Methods in Fluid Dynamicas (Initial and Initial Boundary-Value Problems). Cambridge University Press (1985).

[12] Spagnolo, S.: The Cauchy problem for Kirchoff equations. Rendioconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 62, 17-51 (1992).

[13] Strauss, W. A.: Nonlinear wave equations. George Mason University, USA (1989).